Realgymnasium Rämibühl
Maturajahr 2015

Die Dynamik der Tent Map

Maturaarbeit im Fachbereich Mathematik

betreut von

Lourdes Dominguez, Realgymnasium Rämibühl
Thomas Kappeler, Institut für Mathematik, Universität Zürich

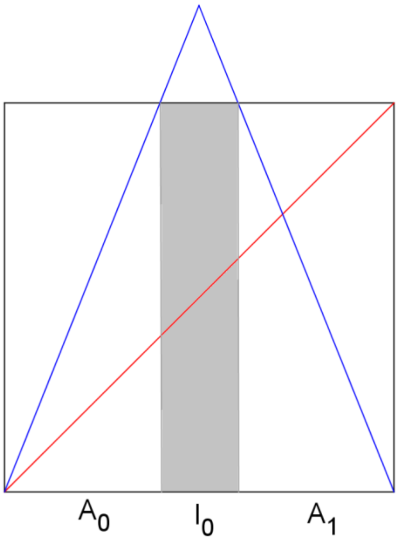
Manuel Trachsler, 6a
Boglerenstrasse 42b
8700 Küsnacht

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die Dynamik der Tent Map untersucht, welche sich durch

$$x_{n+1} = T_\mu(x_n) = \begin{cases} \mu x_n, & x_n < \frac{1}{2} \\ \mu(1 - x_n)\ , & \frac{1}{2} \leq x_n \end{cases}$$

definiert.



Graphik 1: Die Tent Map mit Intervallen $A_0, I_0, A_1, \mu > 2$

Diese Abbildung verhält sich für $\mu > 2$ chaotisch. Die Voraussetzungen, die eine solche Abbildung erfüllen muss, sind die folgenden:

1) Sie muss sensibel abhängig vom Anfangswert sein.
2) T_μ muss topologisch transitiv sein.
3) Die periodischen Punkte müssen dicht sein.

Die Tent Map erfüllt alle diese drei Voraussetzungen für $\mu > 2$. In dieser Arbeit wird dies mithilfe der symbolischen Dynamik bewiesen. Die symbolische Dynamik ist ein geeigneter Weg, um dynamische Systeme, welche bestimmte Eigenschaften haben, effizient zu charakterisieren.

Die Abbildung eines gewissen Intervalls ist bei der Tent Map mit $\mu > 2$ grösser als 1. Dieses Intervall ist ein geschlossenes Intervall mit der Mitte $\frac{1}{2}$, welches wir I_0 nennen. Wir wissen dann: $T_\mu\ (I_0) > 1$, $T_\mu{}^2\ (I_0) < 0$ und $T_\mu{}^n\ (I_0) \to -\infty$. Diese Punkte fallen also sozusagen weg.

Wird dieses Prozedere für alle x wiederholt, für die gilt $T_\mu{}^n\ (x) \in I_0$, dann bleibt uns eine Ansammlung von Punkten übrig, eine Cantor-Menge. Wir bedienen uns dann einem binären System, welches den Punkten $T_\mu{}^n\ (x)$ links von I_0 die 0 zuschreibt und den Punkten $T_\mu{}^n\ (x)$ rechts von I_0 die 1 zuschreibt. Wird dieser Vorgang für $T_\mu{}^{n+m}\ (x)$ wiederholt, so entsteht eine binäre Reihe $s = (s_0, s_1, s_2 \ldots)$. Anhand dieser wird die symbolische Dynamik erklärt.