

Recherche rapide de divisib

Maurice Cosandey, maurice.cosandey@bluewin.ch

Lors du dernier Festival *Science on Stage*, qui s'est tenu à Londres en juin 2015, l'équipe de Turquie a présenté une sorte de jeu de l'oie qui permet de déterminer rapidement et sans calcul si un nombre quelconque est divisible par un nombre premier tout aussi quelconque. On utilise une sorte de rosace que l'on parcourt un peu comme dans le jeu de l'oie, ou dans le jeu des échelles.

Rappelons que le jeu des échelles est un parcours de 64 ou 100 cases où on jette un dé à tour de rôle, et où le pion avance par étapes d'autant de cases que le jet de dé l'indique. Mais de temps en temps, le joueur atteint une case qui le propulse sur une case très éloignée de celle qu'il a atteinte. C'est le même principe qui anime celui qui veut savoir si un grand nombre est divisible par un autre. Sauf que le joueur effectue un tel saut à la fin de chaque déplacement, et que ce n'est pas le dé qui définit le parcours à effectuer, mais les différents chiffres dont est fait le nombre à tester.

Exemple: divisibilité par 7

Supposons qu'on veuille savoir si un nombre comme 2081 est divisible par 7. On utilise une rosace à 7 cases, numérotées de 0 à 6 (figure 1).

Le nombre testé (2081) a 4 chiffres. Il y aura donc 4 étapes à notre démarche. Chaque étape est formée d'un

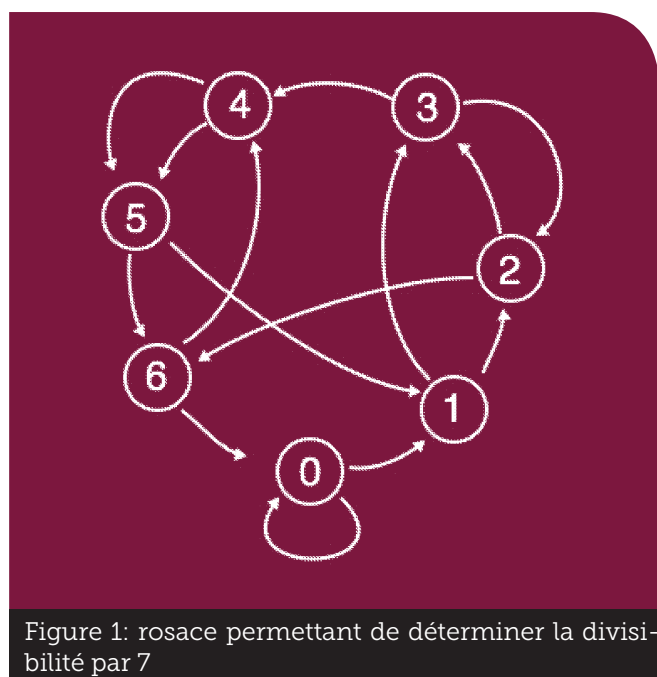


Figure 1: rosace permettant de déterminer la divisibilité par 7

parcours où un pion avance pas à pas dans le cercle 1-2-3-4-5-6-0-1-2- etc., comme au jeu de l'oie, donc d'autant de cases que le chiffre dont on s'occupe. Mais à la fin de chaque étape, on fait un saut brutal hors du cercle 1-2-3- etc. en suivant le trajet fléché. On atteint un point de chute très différent. Et on repart de là pour continuer comme dans le jeu de l'oie, toujours dans le même sens.

Pour l'exemple 2081, la première étape implique une avance circulaire de 2 cases. La suivante aura une avance circulaire de 0 case, la troisième de 8 cases et la dernière de 1 case. Après chaque étape, il faut faire un saut brutal en suivant les trajets fléchés hors du cercle. Et si, à la fin du parcours, on tombe sur le chiffre zéro, le nombre testé est divisible par 7.

Allons-y lentement. On part toujours de zéro.

1re étape (définie par le chiffre 2). Avancer de 2 cases sur le cercle 1-2-3- etc.. On arrive bien sûr sur la case 2. Le saut brutal mène alors de 2 à la case 6.

2e étape (définie par le chiffre 0). Avancer de 0 cases à partir de la case 6 sur le cercle selon le principe du jeu de l'oie. Cela nous laisse sur la case 6. Mais le saut brutal nous envoie de 6 à la case 4.

3e étape (définie par le chiffre 8). Avancer de 8 cases, à partir de la case 4 sur le cercle. Cela nous mène à la case 5, en passant par-dessus le zéro. De là, le saut brutal nous envoie de la case 5 à la case 1.

4e étape (définie par le chiffre 1). Avancer de 1 case, à partir de la case 1. Cela nous mène à la case 2. A la fin, on ne fait pas le saut brutal. La dernière case ainsi atteinte est le reste de la division par 7. On arrive sur zéro si le nombre initial est divisible par 7.

Comme nous sommes arrivés sur la case 2, qui n'est pas zéro, le nombre 2081 n'est pas divisible par 7. Il reste 2 à la division $2081/7$. Mais par contre, si on soustrait ce reste de 2, on obtient $2081 - 2 = 2079$ qui, lui, est un multiple de 7. Et en effet: $2079 = 7 \times 297$!

Comment créer soi-même une telle rosace

L'élaboration de telles rosaces peut se faire très rapidement pour chaque diviseur n , premier ou non.

On commence par dessiner la roue des nombres entiers de 0 à $n-1$. Pour la divisibilité par 7, par exemple, on établit une roue où se succèdent les nombres de 0 à 1, 2, 3, 4, 5 et 6, et on termine en reliant 6 à la première case, donc à zéro.

Puis on relie par une longue flèche courbe chaque nombre n à la case dont le numéro est égal au reste de la division de $10 \times n$ par 7. Ainsi, pour la divisibilité par 7, on a :

ilité par un nombre premier

1 est relié à 3, parce que 3 est le reste de la division $10 : 7$.
En effet, $10 : 7 = 1$, reste 3
2 est relié à 6, parce que 6 est le reste de la division $20 : 7$.
En effet, $20 : 7 = 2$, reste 6
3 est relié à 2, parce que 2 est le reste de la division $30 : 7$.
En effet, $30 : 7 = 4$, reste 2
4 est relié à 5, parce que 5 est le reste de la division $40 : 7$.
5 est relié à 1, parce que 1 est le reste de la division $50 : 7$.
6 est relié à 4, parce que 4 est le reste de la division $60 : 7$.
0 est relié à 0, parce que 0 est le reste de la division $0 : 7$.
Ce processus est aisé à généraliser.

Ainsi, pour la divisibilité par 13 (figure 2), on crée une roue des nombres entiers de 0 à 12. Puis on détermine pour chaque case n le reste de la division de $10 \times n$ par 13. On crée donc de longues flèches courbes qui relient n à ce reste de division. On obtient ainsi des longues flèches courbes reliant 1 à 10, 2 à 7, 3 à 4, 4 à 1, 5 à 11, 6 à 8, 7 à 5, 8 à 2, 9 à 12, 10 à 9, 11 à 6, 12 à 3, et 0 à 0.

Le lecteur parviendra aisément à appliquer ce mode de faire pour n'importe quel diviseur, ce qui permet de créer n'importe quelle rosace

Et si vous connaissez une application pittoresque et spectaculaire du même acabit, annoncez-vous! Vous participerez peut-être au prochain festival de *Science on stage* en 2017 avec l'équipe de Suisse!

Informations sur le site www.science-on-stage.ch •

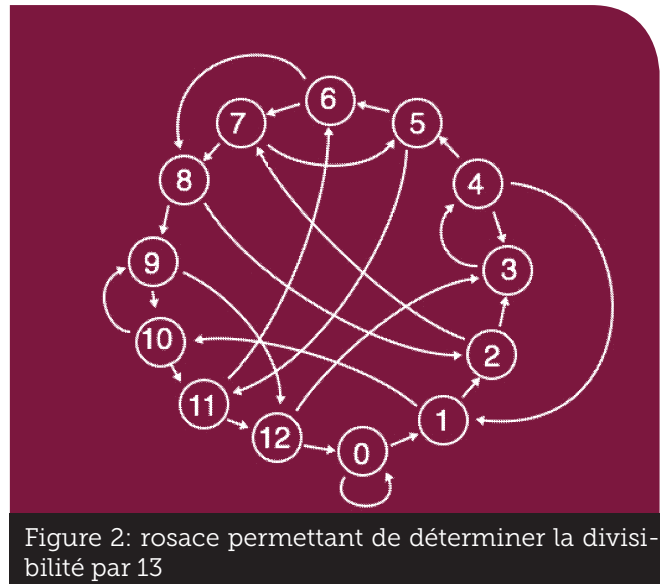


Figure 2: rosace permettant de déterminer la divisibilité par 13

Cette page fait partie de la série d'articles consacrée au concours *Science on Stage*, ainsi qu'au problème de relève dans les domaines Mathématiques, Informatique, sciences Naturelles et Technique (MINT) que connaît la Suisse depuis de nombreuses années. Elle est coordonnée par l'Académie suisse des sciences naturelles SCNAT (www.scnat.ch).