

# SPG MITTEILUNGEN COMMUNICATIONS DE LA SSP

## AUSZUG - EXTRAIT

### Meilensteine der Physik (5)

#### Die ersten Jahre nach der Entdeckung des Quanten-Hall-Effekts

*Rudolf H. Mof, Festkörpertheorie, Paul Scherrer Institut, CH-5232 Villigen*

This article has been downloaded from:  
[http://www.sps.ch/uploads/media/Mitteilungen\\_Milestones\\_5.pdf](http://www.sps.ch/uploads/media/Mitteilungen_Milestones_5.pdf)

© see [http://www.sps.ch/bottom\\_menu/impressum/](http://www.sps.ch/bottom_menu/impressum/)

# Meilensteine der Physik (5)

## Die ersten Jahre nach der Entdeckung des Quanten-Hall-Effekts

Rudolf H. Morf, Festkörpertheorie, Paul Scherrer Institut, CH-5232 Villigen

Im folgenden Bericht schildere ich Einsichten und ein paar persönliche Erlebnisse im Zusammenhang mit den ersten Entdeckungen im Rahmen des Quanten-Halleffektes. Die Sprache für diesen Bericht durfte ich frei wählen. Ohne Kenntnis von dem Artikel zum Thema Sprache in der Wissenschaft (S. 40), der sich für den Gebrauch der kontinentaleuropäischen Sprachen stark macht, hatte ich bereits entschieden, deutsch zu schreiben.

Im Jahre 1980 hatte Klaus von Klitzing den ganzzahligen QH-Effekt entdeckt [1], wofür ihm bekanntlich 1985 der Nobelpreis für Physik verliehen wurde. Er hatte Plateaus im Hall-Widerstand  $R_H$  bei Werten

$$R_H = \frac{1}{n} \frac{h}{e^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

entdeckt. Robert Laughlin, damals Postdoc an den Bell Laboratorien in Murray Hill, New Jersey, konnte deren Auftreten und ganz besonders ihre Unempfindlichkeit gegenüber Störstellen und ihre Unabhängigkeit von der Probengeometrie bei dieser Entdeckung erklären. Mit einem allgemeinen Symmetrieprinzip, nämlich der Invarianz der Elektrodynamik gegenüber Eichtransformationen, hatte er 1981 gezeigt, dass der Hall-Widerstand  $R_H$  eines zweidimensionalen Elektronensystems (2DES) in einem senkrechten Magnetfeld in exakten ganzzahligen Bruchteilen  $1/n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) der fundamentalen Konstanten  $h/e^2$  quantisiert ist [2]. Bedingung dafür ist, dass Energielücken im Spektrum der delokalisierten elektronischen Zustände existieren. Der Ursprung dieser Energielücken war seit langem bekannt. Die kinetische Energie eines 2DES in einem senkrechten Magnetfeld ist nämlich quantisiert in sogenannten Landau-niveaus. Deren Abstand, eben die Energielücke  $\Delta E$ , ist proportional zum angelegten senkrechten Magnetfeld  $B$ .

Dass diese Arbeit von Robert Laughlin eine Schlüsselkenntnis beinhaltete, war Laughlins Kollegen an den Bell Laboratorien entgangen. Sie hatten seine Bewerbung für eine feste Anstellung an ihrer Institution abgelehnt. Als dann ihr ehemaliger Theoretikerkollege Bert Halperin bei ihnen einen Seminarvortrag über Laughlins Erkenntnis hielt, waren sie nach Aussage von Maurice Rice darüber beschämt, dass sie die Bedeutung dieser Arbeit nicht erkannt hatten.

Anschliessend publizierte Halperin eine Arbeit [3], die wichtige Fragen rund um das Eichinvarianz Argument von Laughlin klärten, so z.B. die Frage, wie sich das Elektronensystem an den Rändern der Probe verhält, wie es auf Unordnung reagiert und wie und wo der Strom fliesst. Es sollte eine der meistzitierten Publikationen des Quanten-halleffektes werden und grosse Ausstrahlung behalten bis zur heutigen Zeit.

Kaum ein Jahr später sorgte das Experiment von Tsui, Störmer und Gossard [4] für eine weitere grosse Überraschung: Das Neue und Unerwartete (Abbildung 1) war das Auftreten eines Plateaus in  $R_H$ , das nicht bei einem *ganzzahligen Bruchteil* von  $h/e^2$ , sondern bei dem *Dreifachen* desselben lag, wie wenn  $n$  in Gl. (1) statt einer ganzen Zahl den Wert  $1/3$  hätte. Dan Tsui soll beim Betrachten des neuen Plateaus (siehe Abbildung 1 bei Magnetfeld  $B = 150$  kG)

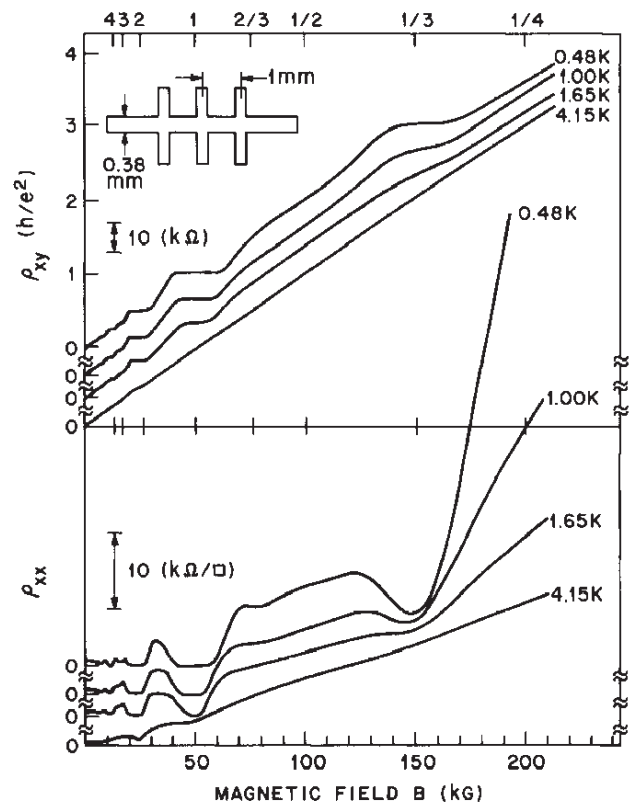


Abbildung 1. Messkurven von Tsui, Störmer und Gossard [4].

spontan an 'Quarks' gedacht haben. Diese tragen ja ein Drittel der Elementarladung. Das neue Plateau war nämlich im Widerspruch zu Laughlins Eichinvarianzargument, das generell für die Hall-Widerstandsplateaus ganze Bruchteile von  $h/e^2$  voraussagte. Der Widerspruch konnte nur dadurch aufgelöst werden, dass die Teilchen, die den Strom in diesem Zustand transportieren, eine gebrochenzahlige Ladung, nämlich  $e/3$ , tragen. Dass der Ursprung für diese Drittelladungen im Elektronensystem zu suchen ist, war aber Tsui sicher klar. Woher die für das Plateau notwendige Energielücke kommt, war aber ein Rätsel.

Das neue Plateau bildet sich erst bei Temperaturen unterhalb etwa 1 K aus. Das untere Bild zeigt, dass der longitudinale Widerstand  $R_L = \rho_{xx}$  in der Mitte jedes Plateaus ein ausgeprägtes Minimum hat. Bei höheren Temperaturen (vgl.  $T = 4.15$  K) verhält sich dagegen der Hallwiderstand klassisch linear wie  $R_H \approx B/(d_e ec)$ . Diese Relation erlaubt die präzise Bestimmung der Elektronendichte  $d_e$ .

Hinweise auf eine Diskontinuität des chemischen Potentials bei einer partiellen Füllung  $\nu$  des niedrigsten Landau-niveaus von  $\nu = 1/3$  zeigten die Resultate von exakten Diagonalisationen des Hamiltonoperators von Yoshioka, Halperin und

Lee [5]. Doch die theoretische Erklärung für diesen  $\nu = 1/3$  Zustand liess nicht lange auf sich warten: In einem wegberreitenden konzisen Letter [6] präsentierte wiederum Robert Laughlin eine Versuchswellenfunktion mit der speziellen Eigenschaft, dass alle ihre Nullstellen mit den Positionen der Elektronen zusammenfallen, bei  $\nu = 1/3$  jeweils dreifache Nullstellen auf jeder Elektronenposition. Überdies konnte Laughlin die Voraussage machen, dass die geladenen Anregungen mit der niedrigsten Energie eine gebrochene Ladung  $\pm e/3$  aufweisen würden.

Zuvor hatte Laughlin eine Arbeit zur Publikation [7] eingereicht, in der er die Schrödingergleichung für drei Elektronen im Magnetfeld in 2 Dimensionen (2D) exakt löste. Er fand dabei überzeugende Hinweise auf Inkompressibilität in diesem sehr kleinen System. Doch wurde diese Arbeit von Gutachtern und Physical Review nicht speditiv behandelt und so vom Letter [6] zeitlich überholt. Sicher hat sie ihn aber zu den Erkenntnissen des Letters inspiriert.

Für ihr Experiment benutzten Tsui, Störmer und Gossard [4] eine Aluminium-Galliumarsenid (GaAs – AlGaAs) Heterostruktur, die mittels Molekularstrahlepitaxie hergestellt worden war (Abbildung 2). Das Besondere des mit Aluminium legierten Materials ist seine Bandlücke, die mit der Aluminiumkonzentration zunimmt und damit einstellbar ist. Eine Dotierung mit Silizium erzeugt ein 2DES in der GaAs-Schicht unmittelbar unter der Grenzfläche zur AlGaAs-Deckschicht. Entscheidend ist dabei, dass die Grenzfläche zwischen dem GaAs-Substrat und der AlGaAs-Deckschicht hohe kristalline Qualität aufweist. Dies wird dadurch ermöglicht, dass durch Legierung mit Al die Gitterstruktur des GaAs gar nicht und seine Gitterkonstante nur minimal verändert wird.

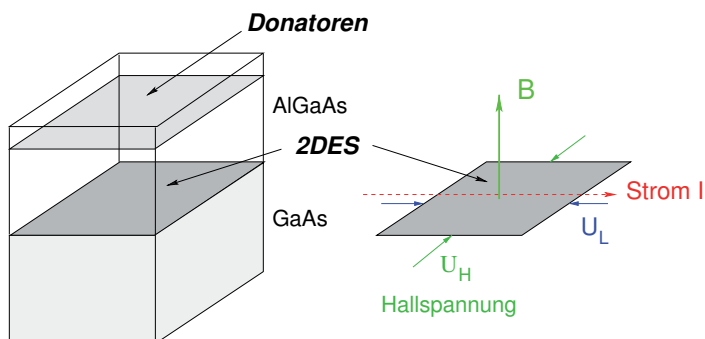


Abbildung 2. Heterostruktur von Tsui, Störmer und Gossard [4]

Horst Störmer hatte überdies die brillante Idee, die Silizium Donatoren 50 nm von der Grenzschicht entfernt zu deponieren. Durch diese "Modulationsdotierung" wird die Streuung der Elektronen im 2DES an den ionisierten, positiv geladenen Donatoratomen reduziert. So konnte die Coulomb-Wechselwirkung der Elektronen ihre Wirkung ungestörter entfalten. Dass Wechselwirkungseffekte für das neue Plateau bei  $3h/e^2$  verantwortlich sein mussten, war klar: Ohne Wechselwirkung oder Störstellen existieren im 2DES nur zwei Energieskalen, die in den Landauniveaus quantisierte kinetische Energie und wegen des Spins der Elektronen die Zeeman-Energie. Beide sind proportional zum Magnetfeld. Das Plateau bei  $R_H = 3h/e^2$  entspricht einem zu nur  $1/3$  gefüllten Landauniveau. Man spricht von einem Füllfaktor  $\nu = 1/3$ . Es muss durch einen Energieterm stabilisiert werden, der die Entartung innerhalb des niedrigsten Landauniveaus aufhebt. Nur die Coulomb-Wechselwirkung der Elektronen kommt dafür in Frage.

Dass von Klitzing kein Plateau im Hall-Widerstand bei  $R_H = 3h/e^2$  gefunden hatte, lag daran, dass er für sein Experiment eine Silizium-Metall-Oxid (MOS) Halbleiterstruktur verwendete. Das 2DES liegt in diesen Proben im Silizium unmittelbar unterhalb einer Isolationsschicht aus  $\text{SiO}_2$ . Die Grenzschicht zwischen dem Silizium Kristall und dem amorphen  $\text{SiO}_2$ , an der sich das 2DES ausbildet, ist nicht so perfekt und glatt wie jene im GaAs. Die  $\text{SiO}_2$  Isolatorschicht enthält auch Ladungen, die sehr nahe beim 2DES liegen können. Die Streuung der Elektronen an diesen geladenen Störstellen maskiert die Wechselwirkungseffekte.

### Laughlins Theorie

Robert Laughlin erkannte zunächst, dass es für das Verständnis des beobachteten Widerstands-Plateaus beim Füllfaktor  $\nu = 1/3$  genügt, lediglich die Zustände des spinpolarisierten niedrigsten Landauniveaus zu berücksichtigen und alle höheren Landauniveaus zu vernachlässigen. Die Wellenfunktionen von Elektronen im niedrigsten Landauniveau lassen sich als Polynome in komplexen Koordinaten  $z_k = x_k + i y_k$  multipliziert mit einem Produkt von Gaussfunktionen schreiben. Dabei bedeuten  $x_k$  und  $y_k$  die Koordinaten des  $k$ -ten Elektrons in der Ebene.

Laughlins Theorie basiert auf der grundlegenden Bedeutung der Nullstellen dieser Polynome. Die Anzahl dieser Nullstellen ist durch die Zahl der Flussquanten  $N_\Phi$  im System gegeben. Diese wächst proportional zum Magnetfeld. Laughlin entdeckte, dass durch geeignete Wahl der Nullstellen die Coulomb-Wechselwirkung der Elektronen minimiert werden kann. Dies genügt für die Konstruktion des Grundzustandes, da im niedrigsten Landauniveau die kinetische Energie vorgegeben ist. Weil die Coulombenergie bei kleinen Abständen  $r$  wie  $1/r$  divergiert, ist es energetisch vorteilhaft, wenn Elektronen einander möglichst nicht zu nahe kommen. Man kann das erreichen, indem man möglichst viele Nullstellen des Polynoms in  $z_k$  gleichmässig auf die Positionen  $z_i$  der übrigen Elektronen ( $i \neq k$ ) legt. Laughlin gelang dies perfekt, als er seine berühmte Wellenfunktion erfand [6]. In ihr ist das Polynom  $P_m$  das Produkt der Faktoren  $(z_i - z_k)^m$  über alle Paare  $i < k$  der  $N$  Elektronen. Neben der Anzahl  $N$  der Elektronen hat dieses Polynom nur einen einzigen freien Parameter, den Exponenten  $m$  und damit in jeder Koordinate  $N_\Phi = m(N - 1)$  Nullstellen (Abbildung 3). Da in jedem Landauniveau  $N_\Phi$  Zustände existieren, die von  $N$  Elektronen besetzt werden, ist der Füllfaktor  $\nu = N/N_\Phi$  im Laughlin Zustand im thermodynamischen Limes  $\nu = 1/m$ . Er sah, dass das Absolutquadrat dieser Wellenfunktion die Dichte des 2D-Einkomponentenplasma bei einer Kopp-

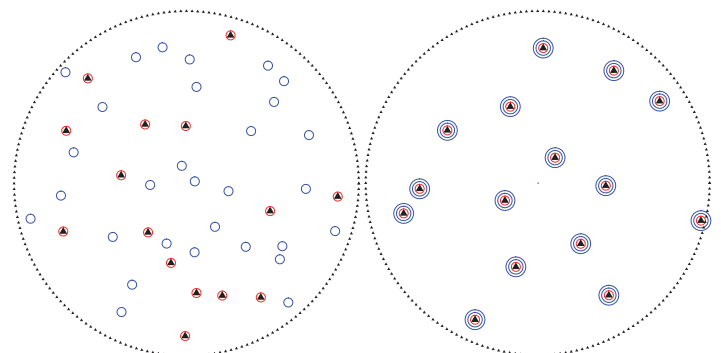


Abbildung 3. Elektronen (Dreiecke) und Flussquanten (Kreise). Bei hohen Temperaturen (links) sind je 2 von 3 Flussquanten frei beweglich, bei tiefen (rechts) sind sie an die Elektronen gefesselt.

lungsstärke  $\Gamma = 2m = 2/\nu$  ist. Dies erlaubte ihm die Berechnung der Coulombenergie, da die Paarkorrelationsfunktion des Einkomponentenplasmas gut untersucht war [8, 9].

Was geschieht nun, wenn das Magnetfeld nicht genau die ausgezeichnete, für den Zustand  $P_m$  geforderte Anzahl von Flussquanten erzeugt? In anderen Worten, wie ändert sich das Polynom  $P_m$ , wenn das Magnetfeld ein wenig grösser wird? Diese Frage beantwortete Laughlin mittels eines Gedankenexperimentes. Er legte eine unendlich dünne stromdurchflossene Spule in den Punkt  $z_0$  innerhalb des Elektronensystems und erzeugte in dieser  $n$  zusätzliche Flussquanten. Diese bewirken  $n$  zusätzliche Nullstellen für jedes Elektron in der elektronischen Wellenfunktion am Punkt  $z_0$ . Die Wellenfunktion wird dann mit dem Produkt aller Faktoren  $(z_i - z_0)^n$  multipliziert. Wählen wir für den Grad der zusätzlichen Nullstelle  $n = m$ , dann erhält das resultierende Polynom genau die Form einer Laughlinschen Wellenfunktion von  $N+1$  Teilchen. Die zusätzliche  $m$ -fache Nullstelle bei  $z_0$  verhält sich wie ein weiteres Elektron, allerdings ohne dessen Ladung. Der Zusatzterm mit  $n = m$  zusätzlichen Nullstellen führt also zu einem 'Loch' in der Dichte der Elektronen, das insgesamt die Ladung  $e$  enthält (Figur 4 links). Laughlin entdeckte, dass die elementare geladene Anregung, also die mit niedrigster Anregungsenergie, durch ein einziges zusätzliches Flussquant erzeugt wird, das heisst für  $n = 1$ . Dies bewirkt ein  $m$ -mal kleineres Loch in der Elektronendichte (Figur 4 rechts), so dass die Ladung dieser Anregung  $e/m$  beträgt. Auch für den Fall einer Magnetfeldreduktion, bei der die Anzahl Flussquanten um eins reduziert wird, konstruierte Laughlin ein entsprechendes Polynom durch Differentiation. Dadurch entsteht eine lokale Ladungsanhäufung mit der Gesamtladung  $-e/m$ .

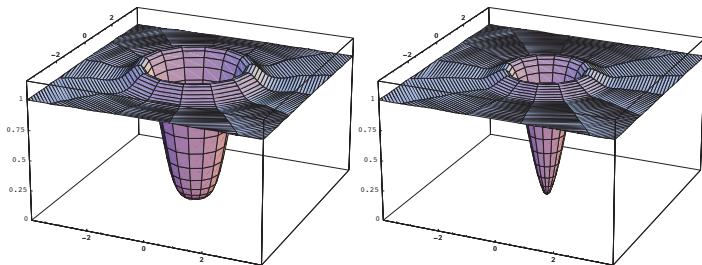


Abbildung 4. Laughlins Quasiteilchen: Elektronendichte eines Loches der Ladung  $e$  (links) bzw. mit Ladung  $e/3$  (rechts)

### Weitere gebrochenzahlige Quanten-Hallzustände

Die Bedeutung der Nullstellen in der Laughlin Theorie wurde sogleich erkannt von Duncan Haldane [10] und von Bert Halperin [11]. Haldane zeigte, dass die Laughlin Wellenfunktion für  $\nu = 1/m$  mit Exponent  $m$  der exakte Grundzustand bei einer speziellen kurzreichweitigen Form der Elektronen-Wechselwirkung ist, die nur für Paare von Elektronen mit Relativdrehimpuls  $L < m$  von Null verschieden ist. Mittels einer raffinierten algebraischen hierarchischen Methode, für die er die Elektronen auf die Oberfläche einer Kugel mit einem Dirac Monopol im Mittelpunkt legte, konstruierte er Wellenfunktionen für die Kugelgeometrie und sagte damit weitere Quanten-Hallzustände bei  $\nu = p/q$  voraus, wobei  $p$  eine beliebige und der Nenner  $q$  eine ungerade natürliche Zahl ist und  $p \leq q$  gilt.

Tatsächlich wurden wenige Monate nach Erscheinen von Haldanes Letter Hinweise für weitere Minima im Längswiderstand  $R_L$  bei anderen gebrochenzahligen Füllfak-

toren beobachtet, z.B. bei  $n = 2/3, 4/3, 5/3, 3/5$  [12, 13]. Mit zunehmender Qualität zeigten die Proben später auch eine Folge von Plateaus bei  $\nu = n/(2n+1)$  und ebenfalls für die Teilchen-Loch symmetrischen Füllfaktoren  $\nu = 1 - (n/(2n+1)) = (n+1)/(2n+1)$  mit immer grösseren ganzen Zahlen  $n$ .

Andererseits verallgemeinerte Bert Halperin die Laughlin Funktion ganz direkt, wie sich die Teilnehmer an der EPS Condensed Matter Konferenz 1983 in Lausanne erinnern können. Er diskutierte damals, wie das Elektronensystem auf eine geringfügige Änderung des Magnetfeldes in der Plateaumitte durch Nukleation von Quasiteilchen reagiert, und wie diese Quasiteilchen bei geringer Dichte Wigner-Kristalle oder inkompressible Flüssigkeiten bilden können, wenn ihre Dichte mit der Dichte der Flussquanten geeignet kommensurat ist. Am Beispiel des  $\nu = 2/3$  Zustandes [12] illustrierte er diese Idee direkt, indem hier die Löcher im voll gefüllten Landauniveau ( $\nu = 1$ ) zu einem  $\nu = 1/3$  Laughlin-Zustand kondensieren. Dies ist ein Beispiel der Teilchen-Lochsymmetrie im niedrigsten Landauniveau, die gilt, wenn der Spinfreiheitsgrad und höhere Landauniveaus vernachlässigt werden können. Darüberhinaus präsentierte Halperin Ideen, wie sich der Spinfreiheitsgrad oder Pseudospin-Freiheitsgrade in verallgemeinerten Laughlin-Wellenfunktionen realisieren lassen. Diese Überlegungen spielen eine wichtige Rolle bis heute, wo der Quanten-Halleffekt in Graphen ein heisses Thema ist.

In den Konferenzberichten der Lausanner Konferenz publizierte Halperin seine Arbeit [11], die mit bisher 752 Zitaten zur am zweitmeisten zitierten Publikation der *Helvetica Physica Acta* werden sollte, nur gerade übertroffen von der Nobelpreis-Arbeit zur Tunnelmikroskopie von Binnig und Rohrer [14] mit heute 1186 Zitaten. Für Sprachinteressierte sei hier erwähnt, dass die meistzitierte auf deutsch geschriebene Publikation in den *HPA* von K. Bleuler stammt [15], während die berühmte Arbeit von Stückelberg und Petermann [16] den ersten Rang für französisch einnimmt.

Ich hatte das Glück, dass mich Bert Halperin damals in Lausanne in seine Ideen einweihte und dafür begeisterte. Dies prägte meine Forschungsarbeit für die kommenden 30 Jahre und führte immer wieder zu gemeinsamen Arbeiten. Dafür bin ich ihm bis heute dankbar. Damals zeigte er mir seine Version der Wellenfunktion des Quasiteilchens mit Ladung  $-e/m$ , in der zwei Elektronen gepaart werden und ein Flussquant weniger - also nicht  $2 \times 3$  bzw.  $2 \times m$ , sondern 5 bzw.  $2m-1$  Flussquanten binden. Diese Wellenfunktion liess sich auch verallgemeinern zur Beschreibung des  $\nu = 2/5$  Zustandes. Er legte mir nahe, die Anregungsenergie des Quasiteilchens mittels einer Monte Carlo Rechnung zu bestimmen. Ich begann dieses Projekt mit der Berechnung der Quasilochenergie und konnte Laughlins approximatives Resultat [6] für die Anregung mit positiver gebrochener Ladung  $+e/3$  nach kurzer Zeit bestätigen. Dagegen war mein vorläufiges Resultat für die Energie des negativ geladenen Quasiteilchens viel grösser als der Wert, den er angegeben hatte [6].

Als Laughlin im Herbst 1983 an der ETH zu Besuch weilte, gab mir Maurice Rice Gelegenheit zu einem Treffen mit Robert Laughlin. Ich zeigte ihm meine Resultate. Er sah sie sich interessiert an, sagte mir aber, meine vorläufigen Resultate für das negativ geladene Quasiteilchen mit Ladung  $-e/3$  seien viel zu gross. Er hätte dafür eine 'rigorous upper

bound', die einen Faktor 3-4 kleiner sei als mein Wert. In der Zwischenzeit hatte sich Bert Halperin wiederholt bei mir nach Resultaten für die Quasiteilchenenergie erkundigt. Ich hatte ja welche, doch musste ich ihm immer wieder mitteilen, dass diese vermutlich falsch seien, da sie ja Laughlins 'rigorous upper bound' widersprächen.

Halperin arbeitete damals ebenfalls an einer hierarchischen Konstruktion von Quanten-Hallzuständen: Stellen wir uns vor, unser Elektronensystem sei bei einem Magnetfeld  $B_3$  im  $\nu = 1/3$  Zustand. Bei einer Änderung des Magnetfeldes werden Quasielektronen ( $B < B_3$ ) bzw. Quasilöcher ( $B > B_3$ ) nukleiert im  $\nu = 1/3$  Zustand. Deren Dichte wächst proportional mit  $|\Delta B| = |B - B_3|$  und bei einem  $B^*$  werden diese Quasiteilchen oder -löcher ebenfalls einen quantisierten Zustand bilden. Halperin überlegte sich dazu, wie die entsprechende verallgemeinerte Laughlin-Wellenfunktion für diese Quasiteilchen bzw. -löcher aussehen musste, und fand heraus, dass diese als Funktion der Positionen der Quasiteilchen durch verallgemeinerte Laughlinfunktionen mit gebrochenzahligen Exponenten beschrieben werden. Beispielsweise nimmt dabei der Relativdrehimpuls  $L_{\text{rel}}$  zweier Quasiteilchen im  $\nu = 1/3$  Zustand gebrochenzahlige Werte  $L_{\text{rel}} = 2n - 1/3$  für Quasiteilchen bzw.  $L_{\text{rel}} = 2n + 1/3$  für Quasilöcher an, wobei  $n$  eine natürliche Zahl ist. Dies hat eine gebrochenzahlige (Anyon-) Statistik der Quasiteilchen zur Folge.

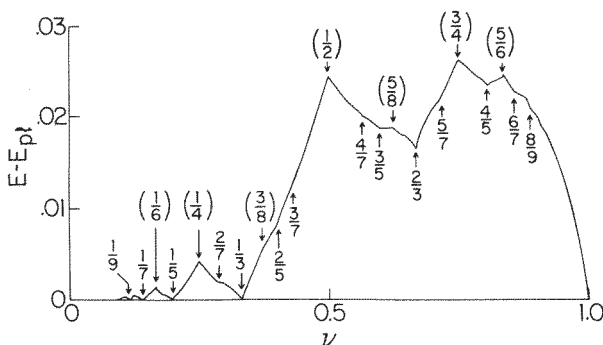


Abbildung 5: Potenzielle Energie pro Flussquant [17]

Etwa zwei Monate nach Erscheinen von Haldanes Letter [10] sandte Halperin seine Arbeit an Physical Review Letters [17, 18]. Ausser der Diskussion der verallgemeinerten Laughlinfunktionen für die Quasiteilchen mit deren gebrochenzahligen Statistik (vgl. [19]) präsentierte er die vom Füllfaktor abhängige Grundzustandsenergie der spinpolarisierten Quanten-Hallzustände im niedrigsten Landau-niveau, die in seinerer Hierarchie auftreten können. Dazu approximiert er die Quasiteilchen-Wechselwirkungsenergie wie Laughlin durch die Energie des klassischen 2D-Einkomponenten Plasmas und nutzte die Teilchen-Lochsymmetrie. Das Resultat (Abbildung 5) präsentierte er in Figur 1 seines Letters [17]. Als Energienullpunkt hatte er dabei die Energie  $E_{pl}$  des klassischen Einkomponentenplasmas gewählt, die eine glatte Funktion des Kopplungsparameters  $\Gamma = 2/\nu$  und damit des Füllfaktors  $\nu$  ist.

Die so berechnete Energie  $E - E_{pl}$  als Funktion des Füllfaktors ist stetig im  $\nu$ -Intervall  $[0, 1]$ , hat aber unstetige 1. Ableitungen an allen gebrochenzahligen  $\nu$  mit geradem Nenner, ähnlich der Weierstrassfunktion. Für diese Rechnung hätte

Halperin zuverlässige Resultate für die Energie des Quasiteilchens gebraucht. Meine Werte kamen dazu nicht in Frage, da sie Laughlins 'rigorous upper bound' widersprachen. Was er da machte, ist meiner Meinung nach äusserst bemerkenswert. Er schreibt im Letter [17] (Text in eckigen Klammern von mir eingefügt): "Therefore, for purposes of illustration, I have made the arbitrary approximation  $\epsilon^+(m_s) = \lambda \epsilon(m_s)$  for the energies of quasiparticle  $\epsilon^+(m_s)$  and quasihole  $\epsilon(m_s)$ , where  $\lambda$  is a constant independent of [the integer]  $m_s$  [characterizing the parent state at hierarchy level  $s$ ], with the choice  $\lambda \approx 3$ ."

Den Grund, warum er diesen Wert annahm, gab Halperin damals nicht an, und nur Wenige kennen ihn. Als ich Halperin später danach fragte, erklärte er mir, was mit dieser Energiekurve passiert, wenn man Laughlins Quasiteilchenenergie, d.h.  $\lambda \approx 1$  einsetzt: Statt einer stetigen Kurve gibt es dann Diskontinuitäten bei allen nach oben gerichteten Spitzen, die bei den Füllfaktoren  $\nu$  mit geradzahligem Nenner zu sehen sind. Die Diskontinuität z.B. bei  $\nu = 1/4$  ist abhängig von der Kurvensteigung bei  $\nu = 1/5^+$  und bei  $\nu = 1/3^-$ , die direkt von der Quasiteilchenenergie  $\epsilon^+(5)$  bzw.  $\epsilon^-(3)$  bestimmt ist. Wird ein Wert  $\lambda \approx 3$  benutzt, dann werden die Diskontinuitäten gleichzeitig bei allen diesen Spitzen sehr klein. Hinter dieser Wahl steckt also die Überlegung, dass man z.B. den Zustand bei  $\nu = 1/4$  ebensogut als iterativ konstruierten Zustand von Quasi-Löchern von  $\nu = 1/3$  her kommend, wie als Quasi-Teilchen Zustand von  $\nu = 1/5$  kommend betrachten kann, und dass die Energie aus Konsistenzgründen dieselbe sein sollte.

Bald nach Erscheinen seines Letters erfuhr Bert Halperin von Duncan Haldane, dass exakte Diagonalisationen eine Energie des Quasiteilchens ergeben, die mit  $\lambda \approx 3 - 4$  kompatibel sind. Ob dies bloss ein glücklicher Zufall ist oder eine tiefere Bedeutung hat, ist bis heute ein Mysterium.

- [1] K. v. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, Physical Review Letters **45**, 494 (1980).
- [2] R. B. Laughlin, Physical Review B **23**, 5632 (1981).
- [3] B. I. Halperin, Physical Review B **25**, 2185 (1982).
- [4] D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gossard, Physical Review Letters **48**, 1559 (1982).
- [5] D. Yoshioka, B. I. Halperin, and P. A. Lee, Physical Review Letters **50**, 1219 (1983).
- [6] R. B. Laughlin, Physical Review Letters **50**, 1395 (1983).
- [7] R. B. Laughlin, Physical Review B **27**, 3383 (1983).
- [8] B. Jancovici, Physical Review Letters **46**, 386 (1981).
- [9] J. Caillol, D. Levesque, J. Weis, and J. Hansen, Journal of Statistical Physics **28**, 325 (1982).
- [10] F. D. M. Haldane, Physical Review Letters **51**, 605 (1983).
- [11] B. Halperin, Helvetica Physica Acta **56**, 75 (1983).
- [12] A. M. Chang, M. A. Paalanen, D. C. Tsui, H. L. Stormer, and J. C. M. Hwang, Physical Review B **28**, 6133 (1983).
- [13] A. M. Chang, P. Berglund, D. C. Tsui, H. L. Stormer, and J. C. M. Hwang, Physical Review Letters **53**, 997 (1984).
- [14] G. Binnig and H. Rohrer, Helvetica Physica Acta **55**, 726 (1982).
- [15] K. Bleuler, Helvetica Physica Acta **23**, 567 (1950).
- [16] E. C. G. Stueckelberg and A. Petermann, Helvetica Physica Acta **26**, 499 (1953).
- [17] B. I. Halperin, Physical Review Letters **52**, 1583 (1984).
- [18] B. I. Halperin, Physical Review Letters **52**, 2390 (1984).
- [19] D. Arovas, J. R. Schrieffer, and F. Wilczek, Physical Review Letters **53**, 722 (1984).