

Mathematik und Physik am Beispiel der Einstein-Grossmann-Kollaboration vor 100 Jahren*

Norbert Straumann
Institut für Theoretische Physik, Universität Zürich,
Winterthurerstrasse 190, CH-8057 Zürich.

19. Juli 2013

1 Einleitung

Die Beziehungen zwischen Mathematik und Physik sind mannigfaltig und subtil. Allgemeine Aussagen sind in der Regel entweder nichtssagend oder – wie wichtige Beispiele zeigen – keineswegs immer zutreffend. Ich werde versuchen, das Thema über den Zugang der Personifizierung anzugehen. Natürlich bieten sich hier viele, ganz unterschiedliche Akteure an. Res Jost hat dies einmal eindrücklich am so unterschiedlichen Duo Gauss-Faraday ausgeführt [1]. Aus guten Gründen und aktuellem Anlass habe ich die einmalige enge Zusammenarbeit des Physikers Einstein mit dem Mathematiker Marcel Grossmann vor 100 Jahren gewählt.

Zur Eröffnung meines Referats hier zwei aufschlussreiche Zitate von grossen Mathematikern.

Unvergesslich ist das folgende Bekenntnis von **Hermann Weyl** im Vorwort seines klassischen Werks “Gruppentheorie und Quantenmechanik”:

“Ich kann es nun einmal nicht lassen, in diesem Drama von Mathematik und Physik – die sich im Dunkeln befruchten aber von Angesicht zu Angesicht so gerne einander verkennen und verleugnen – die Rolle des (wie ich genugsam erfuhr, oft unerwünschten) *Boten* zu spielen.”

Hermann Weyl war zweifellos der wichtigste Vermittler von Mathematik und Physik im 20. Jahrhundert.

In einem aufschlussreichen Interview sagte **Michael Atiyah** u.A. folgendes:

*DPG-Fortbildungskurs für Physiklehrerinnen und Physiklehrer zum Thema: Physik und Mathematik, 22. – 26. Juli 2013, Physikzentrum Bad Honnef.

“The more I have learned about physics, the more convinced I am that physics provides, in a sense, the deepest applications of mathematics. The mathematical problems that have been solved, or technics that have arisen out of physics in the past, have been the lifeblood of mathematics (...). The really deep questions are still in the physical sciences. For the health of mathematics at its research level, I think it is very important to maintain that link as much as possible.” (Mathematical Intelligencer, **6**, 9-19 (1984).)

Zur Rolle der Mathematik für Physiker zitiere ich als Beispiel aus einem euphorischen Brief von **Schrödinger** an Wilhelm Wien vom 22. Feb. 1926 – mitten in seiner fruchtbarsten Schaffensperiode:

“Die Zeit vergeht mir im Fluge. Jeder zweite oder dritte Tag bringt wieder eine kleine Neuigkeit - *es* arbeitet, nicht ich, und dieses Es ist die herrliche klassische Mathematik und die Hilbert-Mathematik, das wundervolle Gebäude der Eigenwerttheorie. Die breiten alles so klar vor einem aus, dass man es nur zu nehmen braucht ohne Mühe und ohne Sorge, das Rechte stellt sich zu seiner Zeit, sobald man es braucht, ganz von selbst ein.”

Ab August 1912 lernte Einstein für ihn neue, anspruchsvolle Mathematik (Differentialgeometrie und Tensoranalysis) und änderte bald seine bisherige Einstellung. Noch kurz vorher (20. Juni 1912) schrieb er an **P. Ehrenfest**:

“Sie sind einer der wenigen Theoretiker, denen die Mathematik-Seuche nicht den natürlichen Verstand geraubt hat!”

Das sollte sich bald ändern. Am 29.10.1912 lesen wir in einem Brief an **A. Sommerfeld**:

“Aber das eine ist sicher, dass ich mich in meinem Leben nicht annähernd so geplagt habe, und dass ich grosse Hochachtung für die Mathematik eingeflösst bekommen habe, die ich bis jetzt in ihren subtileren Teilen in meiner Einfalt für puren Luxus ansah!”

Die Zusammenarbeit von Einstein und Grossmann, über die ich im Folgenden berichten werde, begann mit Einstein’s zweiter Rückkehr nach Zürich anfangs August 1912. Seine lange Wanderung auf dem verschlungenen Weg zu einer relativistischen Gravitationstheorie war an einer entscheidenden Stelle angelangt. Bevor ich auf die anschliessende besonders fruchtbare Periode eingehe, muss ich das zuvor Erreichte kurz zusammenfassen.

Einstein’s Beschäftigung mit Gravitation begann schon kurz nach Abschluss der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) im Jahre 1905. Über seine ersten Bemühungen hat er nichts publiziert, aber aufgrund seiner späteren Berichte wissen wir ziemlich

genau was er versucht hat. Zu diesem Vorspiel will ich hier nichts sagen (siehe dazu [4]). Ich beginne mit der ersten Publikation, in der die Gravitation vorkommt.

Einstein stiess auf sein berühmtes Äquivalenzprinzip, den “glücklichsten Gedanken meines Lebens” – wie er später sagte –, im Jahre 1907, als er an seinem zusammenfassenden Artikel über SRT für das Jahrbuch der *Radioaktivität und Elektronik* [3]¹ arbeitete. Das letzte Kapitel dieser sorgfältig geschriebenen systematischen Darstellung trägt den Titel “Relativitätsprinzip und Gravitation”. Mit Hilfe des Äquivalenzprinzips, das ihn fortan bei seiner Suche nach einer Gravitationstheorie leitete, fand er die Rotverschiebung in einem statischen Gravitationsfeld und danach die Lichtablenkung im irdischen Schwerfeld.

Nach diesem ersten Beitrag vergingen dreieinhalb Jahre, bis sich Einstein wieder über Gravitation äusserte. In dieser Zeit galt sein Hauptinteresse der Quantentheorie, die ihn ja zeitlebens nie losliess. Später schrieb er jedoch über diese Periode: “Während ich an der Zürcher und an der Prager Universität theoretische Physik zu lehren hatte, grübelte ich unablässig über das Problem nach” [5]. Kurz nach seiner Ankunft in Prag erkannte Einstein 1911, dass die Lichtablenkung am Sonnenrand bei einer Sonnenfinsternis beobachtbar ist [6]. Nun nahm er das Gravitationsproblem wieder auf und “arbeitete wie ein Pferd” an der Entwicklung einer kohärenten Theorie statischer Gravitationsfelder. Da er zur Überzeugung gelangte, dass die Lichtgeschwindigkeit vom Gravitationspotenzial abhängt, schloss er, dass die örtlich variable Lichtgeschwindigkeit die Rolle des Gravitationspotenzials übernimmt, und schlug eine nichtlineare Feldgleichung vor, in der auch die gravitative Energiedichte als eine Quelle des Gravitationspotenzials agiert. Deshalb, so schloss Einstein, gilt das Äquivalenzprinzip nur lokal, d.h. in unendlich kleinen räumlichen Gebieten. In der zweiten seiner Prager Arbeiten über Gravitationsstatik zeigt Einstein, wie die Gleichungen der Elektrodynamik und der Thermodynamik in Anwesenheit von Gravitationsfeldern modifiziert werden müssen [7]. (Diese Verallgemeinerung hat überlebt.) An dieser Stelle beginnt er mit der Untersuchung dynamischer Gravitationsfelder. (Näheres zur Entwicklung der Theorie bis zu diesem Zeitpunkt findet der Leser z. B. in [8].)

2 Einstein gewinnt Marcel Grossmann als Mitarbeiter

Zum Zeitpunkt seiner Ankunft in Zürich spät im Juli 1912, war Einstein überzeugt, dass ein metrisches Feld der Raumzeit, welches die starre Minkowski-Metrik der SRT zu einer dynamischen pseudo-Riemann’schen Metrik verallgemeinert, die richtige relativistische Verallgemeinerung des Newton’schen Potentials darstellt. Die Hauptaufgabe war, die Grundgleichung für dieses Feld zu finden. Die Lösung dieser schwierigen Aufgabe lag vorerst völlig im Dunkeln, und Einstein benötigte Hilfe von mathematischer Seite. Bis anhin war er mit bescheidener Mathematik ausgekommen. Das sollte

¹Verweise auf Arbeiten welche in den Collected Papers of Albert Einstein (CPAE) [2] erschienen sind, werden jeweils durch Volumen und Dokument der CPAE zitiert.

sich nun aber ändern. Zum Glück war Marcel Grossmann – sein alter Freund seit ihrer Studienzeit – nun ebenfalls Professor an der ETH und es gelang Einstein, ihn als Mitarbeiter bei seiner Suche nach den Feldgleichungen zu gewinnen. Die Rolle von Grossmann hat Einstein wiederholt kurz gewürdigt. Im Jahre 1923 äusserte er sich dazu so:

“Die entscheidende Idee einer Analogie zwischen dem mathematischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie und der Gauss’schen Flächentheorie kam mir erst im Jahr 1912, als ich nach Zürich zurückgekehrt war, obwohl ich damals nicht mit den Arbeiten von Riemann, Ricci und Levi-Civita vertraut war. Das erstmal wurde meine Aufmerksamkeit durch meinen Freund Grossmann in diese Richtung gelenkt, als ich ihn mit dem Problem konfrontierte, kovariante Tensoren zu finden, deren Komponenten nur von den Ableitungen der Koeffizienten ($g_{\mu\nu}$) der fundamentalen quadratischen Invariante abhängen.”

Viel später schrieb Einstein in einer autobiographischen Skizze kurz vor seinem Tod im Jahre 1955 zur Zusammenarbeit mit Grossmann [5]:

“Er fing sofort Feuer, obwohl er der Physik gegenüber als echter Mathematiker eine etwas skeptische Einstellung hatte. (...). So kam es, dass er zwar gerne bereit war, an dem Problem mitzuarbeiten, aber doch mit der Einschränkung, dass er keine Verantwortung für irgendwelche Behauptungen und Interpretationen physikalischer Art zu übernehmen habe.

Er durchmusterte die Literatur und entdeckte bald, dass das angedeutete mathematische Problem insbesondere durch Riemann, Ricci und Levi-Civita bereits gelöst war. Diese ganze Entwicklung schloss sich an die Gauss’sche Theorie der Flächenkrümmung an, in der zum ersten Male von verallgemeinerten Koordinaten systematisch Gebrauch gemacht war. Riemanns Leistung war die grösste. Er zeigte, wie aus dem Felde der g_{ik} Tensoren der zweiten Differentiationsstufe gebildet werden können. Daraus war zu ersehen, wie die Feldgleichungen der Gravitation lauten müssen – falls Invarianz gegenüber der Gruppe aller kontinuierlichen Koordinatentransformationen gefordert wird. (...).”

Von grundlegender Bedeutung erwiesen sich die berühmte Abhandlung von Christoffel (1869) “Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades” und die auf dieser fussende Abhandlung von Levi-Civita & Ricci (1901) “Methodes de calcul différentiel absolu et leurs applications”.

Die Ergebnisse der fruchtbaren Zusammenarbeit von Einstein und Grossmann wurde in der gemeinsamen Arbeit mit dem bescheidenen Titel “Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation” [10] zusammengefasst. Diese enthält alle wesentlichen Elemente der endgültigen Theorie vom November



Abbildung 1: Marcel Grossmann.

1915, und gehört zu den wichtigsten physikalischen Publikationen des 20. Jahrhunderts. Viel zusätzliche Einsicht kann von Einstein's detailliertem "Zürcher Notizbuch" gewonnen werden. Das Studium dieser Forschungsnotizen ist wirklich faszinierend. Man sieht Einstein an der Arbeit und was theoretische Physik im besten Falle ist: Ein delikates Zusammenspiel zwischen physikalischer Argumentation, basierend auf einer intuitiven Einschätzung der wichtigsten empirischen Fakten, und – ebenso wichtig – mathematisch strukturellen Aspekten und Forderungen. Wir werden sehen, dass Einstein bereits 1912 der endgültigen Theorie sehr nahe kam. Interessante physikalische und begriffliche Schwierigkeiten, die ich diskutieren werde, überzeugten ihn jedoch für lange Zeit, dass er die allgemeine Kovarianz der Feldgleichungen "schweren Herzens" aufgeben musste. In einem Brief an Lorentz [12] nannte er dies den "hässlichen dunklen Fleck" der Theorie. Damit verlor Einstein fast drei Jahre, bis Physik und Mathematik in der wunderschönen Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) harmonisch zusammenpassten.

3 "Entwurf"- Theorie von 1913

Wir kommen nun zu einer näheren Besprechung der Einstein-Grossmann Arbeit, bei der auch Einsteins Forschungsnotizen wesentlich berücksichtigt werden.

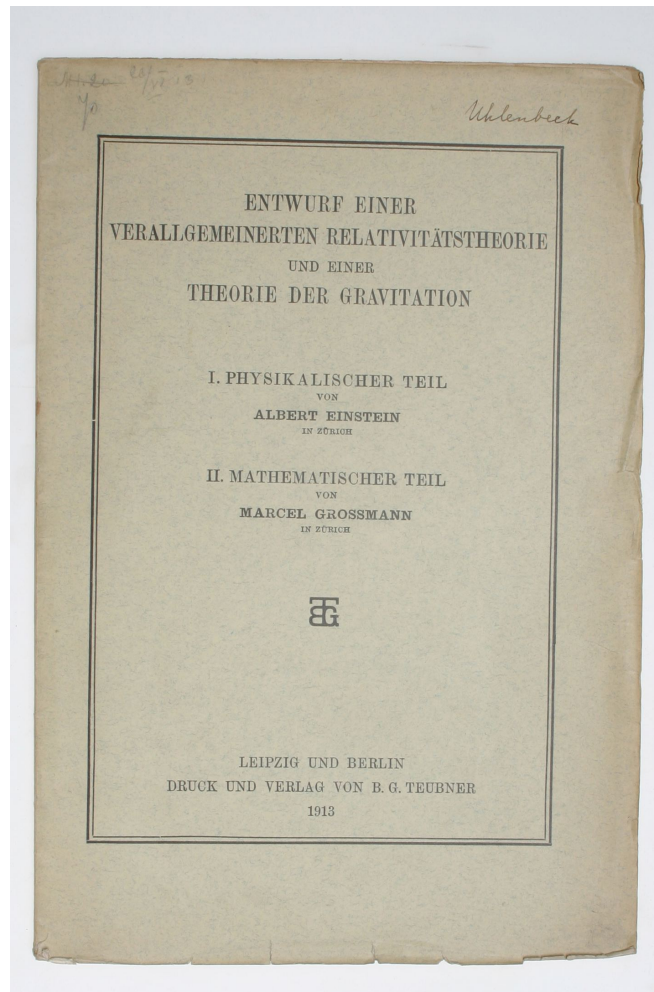


Abbildung 2: Deckblatt der Einstein-Grossmann “Entwurf” Arbeit.

3.1 Anforderungen an die zukünftige Gravitationstheorie

Die folgende Mischung von physikalischen und mathematischen Eigenschaften einer relativistischen Gravitationstheorie gehören zu Einsteins hauptsächlichen Leitungsprinzipien:

- Diese muss für schwache Felder und langsam bewegte Materie in die Newton'sche Theorie übergehen.
- Es müssen die Erhaltungssätze für Energie und Impuls von Feld plus Materie gelten.
- Das Äquivalenz-Prinzip muss garantiert sein.
- Die Theorie respektiert ein verallgemeinertes Relativitätsprinzip für beschleunigte Bezugssysteme, welches in Rechnung stellt, dass Gravitation und Trägheit durch ein und dasselbe Feld $g_{\mu\nu}$ beschrieben werden. Einstein drückte dies durch die Forderung

der allgemeinen Kovarianz der Grundgleichungen aus ($\rightarrow$ Verwirrungen und Debatten bis in die jüngere Zeit).

3.2 Non-gravitational laws in external gravitational fields

The easier part of the new theory was to describe the coupling of external gravitational fields to matter and electromagnetic fields.

In one of the Prague papers Einstein had derived the equation of motion for a point particle in a static field from a variational principle, which is now generalized in an natural manner to

$$\delta \int ds = 0, \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1)$$

The corresponding Euler-Lagrange equation is the geodesic equation of motion for a point particle. Considering an incoherent dust distribution as an ensemble of particles, Einstein guesses that the energy-momentum conservation law of special relativity, $\partial_\nu T^{\mu\nu} = f^\mu$, with the energy-stress tensor $T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu$, (ρ_0 = rest mass matter density, u^μ = four-velocity field) and an external force density f^μ , should be replaced by

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} g_{\mu\lambda} T^{\lambda\nu}) - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0 \quad (2)$$

($g := \det(g_{\mu\nu})$). The details of Einstein's considerations are described in his Part I, Sect. 4 of the "Entwurf" paper by Einstein and Grossmann [10]. This is just an explicit form of the equation $\nabla_\nu T_\mu{}^\nu = 0$, as stated by Grossmann in his Part II of [10]. Later in Sect. 6 of [10] Einstein generalizes Maxwell's equations in generally covariant form. This part has survived in GR. The coupling of electromagnetic fields to external gravitational fields is not yet formalized to the " $\partial \rightarrow \nabla$ " rule, as a mathematically precise expression of a local version of the equivalence principle.

3.3 In search of the gravitational field equation

Soon, Einstein begins to look for candidate field equations. The pages before 27 of the Zürich Notebook show that he was not yet acquainted with the absolute calculus of Ricci and Levi-Civita. On p. 27, referring to Grossmann, Einstein writes down the expression for the fully covariant Riemann curvature tensor $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Next, he forms by contraction the Ricci tensor $R_{\mu\nu}$. The resulting terms involving second derivatives consist, beside $g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu}$, of three additional terms. Einstein writes below their sum: "should vanish" ["sollte verschwinden"]. The reason is that he was looking for field equation of the following general form:

$$\Gamma^{\mu\nu}[g] = \kappa T^{\mu\nu}, \quad (3)$$

with

$$\Gamma^{\mu\nu}[g] = \partial_\alpha (g^{\alpha\beta} \partial_\beta g^{\mu\nu}) + \text{terms that vanish in linear approximation.} \quad (4)$$

After long complicated calculations, Einstein discovers that the Ricci tensor is of the desired form, when the coordinates are assumed to be *harmonic*. (Readers who are not familiar with this may regard this as a kind of gauge condition, analogous to the Lorentz condition in electrodynamics.)

This seems to look good, and Einstein begins to analyse the linear weak field approximation of the field equation²

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (5)$$

(Readers, familiar with GR, know that Einstein has to run into problems, because of the contracted Bianchi identity.)

3.4 The weak field approximation

The linearized harmonic coordinate condition becomes for $h_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ ($\eta_{\mu\nu}$: Minkowski metric)

$$\partial_\mu (h^{\mu\alpha} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}h) = 0 \quad (6)$$

($h := h^\mu{}_\mu$, indices are now raised and lowered by means of the Minkowski metric). This is nowadays usually called the *Hilbert condition*, but Einstein imposed it already in 1912. The field equation becomes an inhomogeneous wave equation:

$$\square h_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu}. \quad (7)$$

Einstein takes for $T_{\mu\nu}$ his earlier expression for dust.

But now he runs into a **serious problem**:

From $\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0$ in the weak field limit, it follows that $\square(\partial^\nu h_{\mu\nu}) = 0$, hence the harmonic coordinate condition requires $\square(\partial_\nu h) = 0$, and therefore the trace of the field equation implies $\square h = -2\kappa T = \text{const.}$, $T := T^\mu{}_\mu$. For dust this requires that $T = -\rho_0 = \text{const.}$ This is, of course, unacceptable. One would not even be able to describe a star, with a smooth distribution of matter localized in a finite region of space.

3.5 Einstein's modified linearized field equation

Now, something very interesting happens. Einstein avoids this problem by modifying the field equation (7) to

$$\square(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h) = -2\kappa T_{\mu\nu}. \quad (8)$$

²Never before had Einstein used in his work such advanced and complex mathematics. This is expressed in a letter to Arnold Sommerfeld on 29 October 1912 (CPAE, Vol. 5, Doc. 421): "But one thing is certain: never before in my life have I toiled any where near as much, and I have gained enormous respect for mathematics, whose more subtle parts I considered until now, in my ignorance, as pure luxury. Compared with this problem, the original theory of relativity is child's play."

Then the harmonic coordinate condition (6) is compatible with $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$. Remarkably, (8) is the linearized equation of the final theory (in harmonic coordinates). One wonders why Einstein did not try at this point the analogous substitution $R_{\mu\nu} \rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ or $T_{\mu\nu} \rightarrow T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T$ in the full non-linear equation (5), which would have led to the final field equation of GR. One probable reason for this is connected with the Newtonian limit.

3.6 The problem with the Newtonian limit

The problem with the Newtonian limit was, it appears, one of the main reasons why Einstein abandoned the general covariance of the field equation. Apparently, (8) did not reduce to the correct limit. That it leads to the Poisson equation for $g_{00}(\mathbf{x})$ is fine, but because of the harmonic coordinate condition the metric **can not be spatially flat**. (The almost Newtonian approximation of (6) and (8) is derived in textbooks on GR; see, e.g., [14], Sect. 4.2.) Einstein found this unacceptable. He was convinced that for (weak) static gravitational fields the metric must be of the form $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(g_{00}(\mathbf{x}), 1, 1, 1)$, as he already noted on p. 1 of his research notes. I wonder why he did not remember his cautious remark in one of his Prague papers [15] on static gravitational fields, in which – while assuming spatial flatness – he warned that this *may very well turn out to be wrong*, and says that actually it does not hold on a rotating disk. Since a non-flatness would not affect the geodesic equation in the Newtonian limit, there is actually, as we all know, no problem. But Einstein realized this only three years later³. Well(!): “If wise men did not err, fools should despair” (Wolfgang Goethe).

At the time, Einstein arrived at the conviction that there were other difficulties implied by generally covariant field equations. One was connected with energy-momentum conservation (see [13].)

3.7 The ‘hole’ argument against general covariance

At the time when he finished the paper with Grossmann, Einstein wrote to Ehrenfest on May 28, 1913: “The conviction to which I have slowly struggled through is that *there are no preferred coordinate systems of any kind*. However, I have only partially succeeded, even formally, in reaching this standpoint.” (CPAE, Vol. 5, Doc. 441.) In a lecture given to the Annual Meeting of the Swiss Naturforschende Gesellschaft in September 1913, Einstein stated: “Es hat sich durch eine allgemeine Überlegung zeigen lassen, dass Gleichungen, welche das Gravitationsfeld vollständig bestimmen, nicht beliebigen Substitutionen gegenüber kovariant sein können.” Einstein wiederholte diese Aussage kurz danach im September 23 (1913) in seinem Vortrag anlässlich einer wichtigen Tagung in Wien.

³In his calculation of the perihelion motion (on the basis of the vacuum equations $R_{\mu\nu} = 0$) it became clear to him that spatial flatness did not hold even for weak static fields.

The so-called “hole” (“Loch”) argument runs as follows (instead of coordinate transformations, I use a more modern language): Imagine a finite region $\mathcal{D}$ of space-time – the ‘hole’ – in which the stress-energy tensor vanishes. Assume that a metric field g is a solution of a generally covariant field equation. Apply now a diffeomorphism φ on g , producing φ_*g (push-forward), and choose the diffeomorphism such that it leaves the spacetime region outside $\mathcal{D}$ pointwise fixed. Clearly, g and φ_*g are different solutions of the field equation that agree outside $\mathcal{D}$. In other words, generally covariant field equations allow huge families of solutions for one and the same matter distribution (outside the hole). At the time, Einstein found this unacceptable, because this was in his opinion a dramatic failure of what he called the law of causality (now usually called determinism). He then thought that the energy-momentum tensor should (for appropriate boundary or initial conditions) determine the metric *uniquely*.

It took a long time until Einstein understood that this non-uniqueness is an expression of what we now call *gauge invariance*, analogous to the local invariance of our gauge theories in elementary particle physics. On January 3, 1916 he wrote to Besso: “In Abschnitt 12 meiner Arbeit vom letzten Jahre ist alles richtig bis auf das Ende des dritten Absatzes”. The role of diffeomorphism invariance of GR, especially for the Cauchy problem, was first understood by Hilbert.

Final remarks

When Einstein was finishing his work on GR under great stress and was suspending all correspondence with colleagues, he still found time to communicate with Michele Besso. On November 17, 1915 he mailed a postcard from Berlin, that contains the great news:

Einstein an M. Besso, November 17, 1915:

Ich habe mit grossem Erfolg gearbeitet in diesen Monaten. *Allgemein kovariante* Gravitationsgleichungen. *Perihelbewegungen quantitativ erklärt*. Rolle der Gravitation im Bau der Materie. Du wirst staunen. Gearbeitet habe ich schauderhaft angestrengt; sonderbar, dass man es aushält. (...) .

Besso sandte die Neuigkeiten an **H. Zangger** mit der Bemerkung: “Einsteins historische Karte lege ich bei, die Schlusssteinsetzung zur Epoche die mit Newtons ‘Apfel’ begann meldend.”

Die Entdeckung der ART wurde mit Recht schon oft als eine der grössten geistigen Leistungen eines einzelnen Menschen gerühmt. **W. Pauli** sagte bei der Einweihung der von Hubacher geschaffenen Büste Einsteins in Zürich:

Die damals vollendete allgemeine Relativitätstheorie, anders als die spezielle ohne gleichzeitige Beiträge anderer Forscher von Einstein allein aufgebaut, wird für immer das Musterbeispiel einer Theorie von vollendeter Schönheit der mathematischen Struktur bleiben.”

Literatur

- [1] Res Jost, *Das Märchen vom Elfenbeinernen Turm*. “Mathematik und Physik seit 1800; Zerwürfnis und Zuneigung”, p.219. Springer, Berlin (1995).
- [2] CPAE, *The collected papers of Albert Einstein*, Edited by J. Stachel *et al.*, Vols. 1-12. Princeton: Princeton University Press, 1987–2010.
- [3] A. Einstein, On the Relativity Principle and the Conclusions Drawn from It, CPAE, Vol. 2, Doc. 47.
- [4] D. Giulini and N. Straumann, Einstein’s Impact on the Physics of the Twentieth Century, *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics*, 37: 115-173, 2006 [arXiv: physics/0507107].
- [5] A. Einstein, Erinnerungen-Souvenirs, *Schweizerische Hochschulzeitung* 28 (*Sonderheft*) (1955), pp. 145-153; reprinted as “Autobiographische Skizze,” in Carl Seelig, ed., *Helle Zeit-Dunkle Zeit. In Memoriam Albert Einstein*, Zürich, Europa Verlag, 1955, pp. 9-17.
- [6] A. Einstein, On the Influence of Gravitation on the Propagation of Light, CPAE, Vol. 3, Doc. 23.
- [7] A. Einstein, On the Theory of the Static Gravitational Field, CPAE, Vol. 4, Doc. 4.
- [8] N. Straumann, Albert Einstein: Auf dem Weg zur Gravitationstheorie, Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 139/3, 103-112 (1994).
- [9] L. Kollros, Erinnerungen-Souvenirs, *Schweizerische Hochschulzeitung* 28 (*Sonderheft*) (1955), pp. 169-173; reprinted as “Erinnerungen eines Kommilitonen,” in Carl Seelig, ed., *Helle Zeit-Dunkle Zeit. In Memoriam Albert Einstein*, Zürich, Europa Verlag, 1955, pp. 17-31.
- [10] A. Einstein and M. Grossmann, Outline of a Generalized Theory of Relativity and a Theory of Gravitation, CPAE, Vol. 4, Doc. 13. Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, **62**, 225-259 (1914).
- [11] A. Einstein, Research Notes on a Generalized Theory of Gravitation, August 1912, CPAE, Vol. 4, Doc. 10.
- [12] A. Einstein, Letter to H.A. Lorentz, CPAE, Vol. 5, Doc. 470.
- [13] N. Straumann, Einstein’s Zürich Notebook and his Journey to General Relativity, *Ann. Phys. (Berlin)* **523**, 488 (2011); [arXiv:1106.0900].

- [14] N. Straumann, General Relativity, *Graduate Texts in Physics*, Springer Berlin, 2013.
- [15] A. Einstein, The Speed of Light and the Statics of the Gravitational Field, CPAE, Vol. 4, Doc. 3.
- [16] A. Einstein, On the Present State of the Problem of Gravitation, CPAE, Vol. 4, Doc. 17.