Grundlagen der Simulation mit `python`

Guido Lob

Kantosschule Locarno

22.01.2026

Wer bin ich?

Guido Lob (guido.lob@edu.ti.ch)

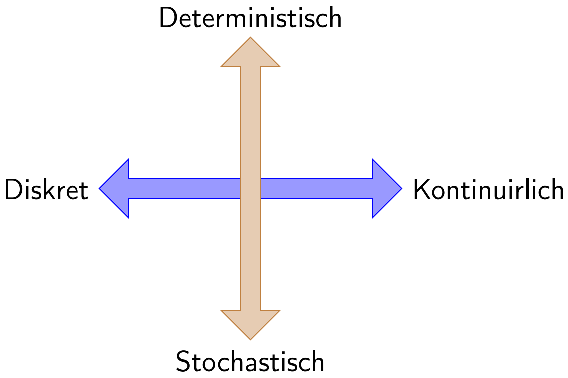
- BSc, MSc, Lehrdiplom Mathematik, ETH Zürich
- GymInf, USI Lugano
- Mathematik- und Informatiklehrer an der Kantonsschule Locarno
- Präsident der CMSI

Um was geht es?

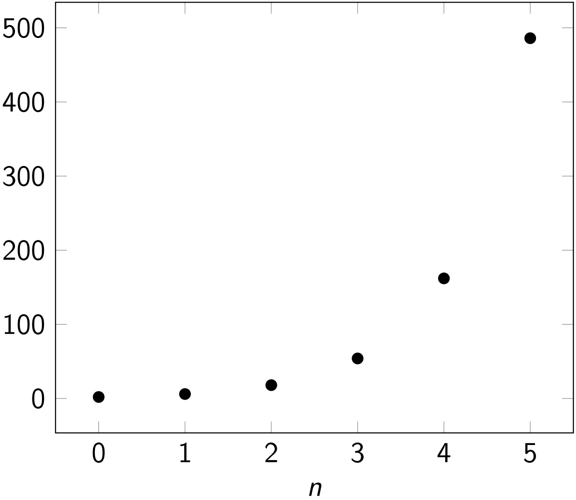
Was ist ein mathematisches Modell?

Ein mathematisches Modell ist eine quantitative Darstellung eines Naturphänomens, mit dem es möglich ist, experimentelle Messungen vorherzusagen.

Arten von Modelle



Kaninchen



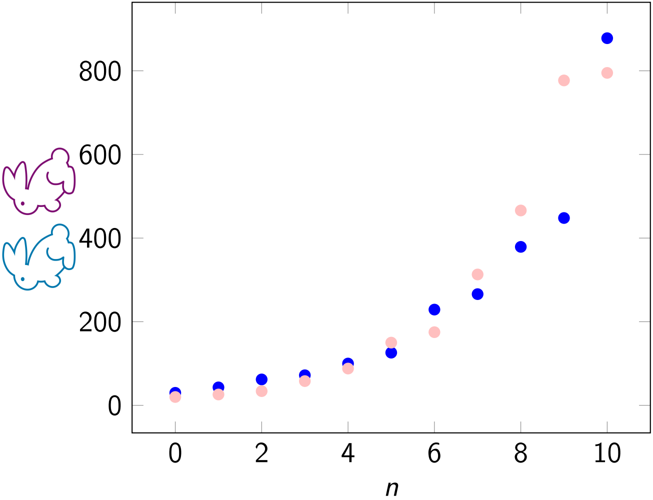
$$
\begin{cases} y_0 & = 2 \\ y_{n+1} & = 3 \cdot y_n \end{cases}
$$

Wie lässt es sich in `python` umsetzen?
(`https://webtigerpython.ethz.ch`)

Kaninchen – python Code

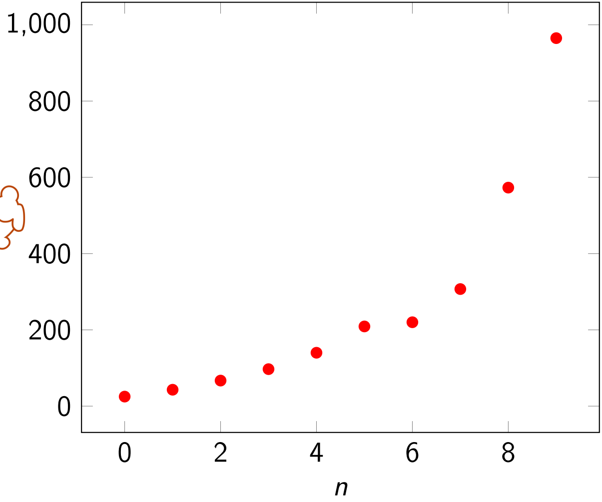
```
import matplotlib.pyplot as plt

bunnies = 2

x = []
y = []

for i in range(10):
    x.append(i)
    y.append(bunnies)

    bunnies = 3 * bunnies

plt.plot(x, y)
#plt.savefig('plot.png', dpi= 400)
plt.show()
```

Kaninchen M/F



Jedes Elternpaar M+F bekommt ein Kind, wobei die Wahrscheinlichkeit jeweils 50% beträgt, dass es M oder F ist.

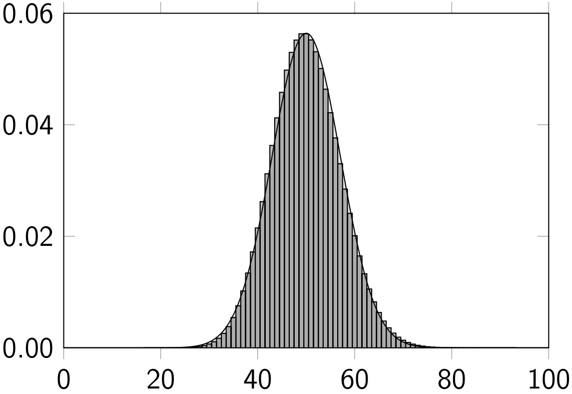
Kaninchen 50/50



Jedes Kaninchen hat ein Kind mit einer Wahrscheinlichkeit von 50%

Kaninchen 50/50

Wie viele Junge werden geboren, wenn dieses Jahr die Bevölkerung 100 Kaninchen beträgt?

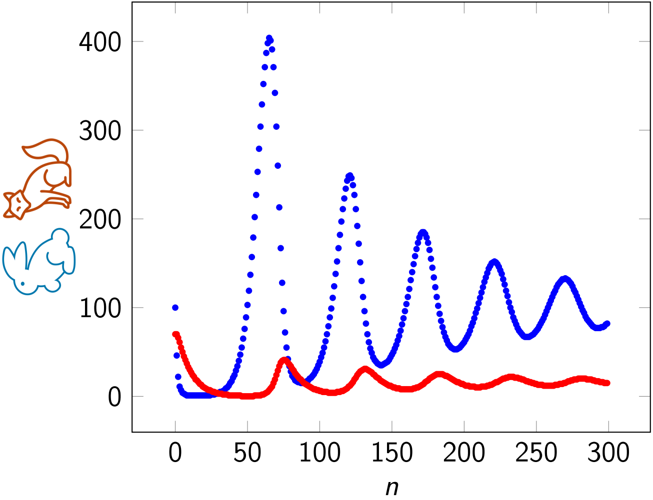



```
random.normalvariate(bunnies/2, bunnies/4)
```

python Code

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import random

bunnies = 30

x = []
y = []

for i in range(10):
    x.append(i)
    y.append(bunnies)

    babies = random.normalvariate(bunnies/2,bunnies/4)
    bunnies = bunnies + babies

plt.plot(x, y)
#plt.savefig('plot.png', dpi= 400)
plt.show()
```

Kaninchen und Wölfe



Kontinuierliche Modelle

Im kontinuierlichen Fall muss man zum Konzept des Instantanen übergehen:

- y **Menge** (zeitabhängig von t)
- dy **instantane Änderung** der Menge

Beispiel

y Position	dy Geschwindigkeit	d^2y Beschleunigung
h Höhe	dh Höhenänderung	

Differenzialgleichungen

Wir sind daran interessiert, y zu kennen, aber oft sprechen uns die physikalischen Gesetze von den Änderungen an.

Bei gegebenen Anfangsbedingungen regelt und beschreibt ihre Änderungsrate die Entwicklung eines Systems.

Def (Gewöhnliche Differentialgleichung)

Eine *Differentialgleichung* ist eine Gleichung, die die instantanen Änderungen (Ableitungen) dy einer unbekannten Menge y (und eventuell Änderungen höherer Ordnung $d^2y, d^3y, \dots$) enthält.

Entwicklungsordnungen

Ord	Beschreibung	Gleichung	Beispiel
0	Konstante Änderung	$dy = k$	Alkoholabbau (Sättigung)
1	Änderung proportional zur Menge	$dy = k \cdot y$	Radioaktiver Zerfall
2	Änderung proportional zum Quadrat der Menge	$dy = -k \cdot y^2$	Chemische Reaktion mit zwei Reaktanten

Wie löst man solche **Gleichungen**?

Vom Kontinuierlichen zum Diskreten

Problem

Die meisten Differentialgleichungen haben **keine** analytische Lösung: das bedeutet, es gibt **keine** geschlossene Formel für die Funktion y.

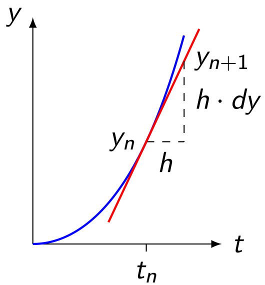
Lösung?

Numerische Methoden: Diskretisieren und iterieren

1. Den Prozess in viele kleine Zeitschritte unterteilen
2. Innerhalb eines kleinen Intervalls die Änderung als konstant annehmen (ggf. über mehrere Schritte mitteln)
3. Das System voranschreiten lassen und den Prozess vom neuen Ausgangspunkt wiederholen

Numerische Methoden (DGL erster Ordnung)

$$dy = f(t, y)$$



Method	Step
Euler	$y_{n+1} = y_h + h \cdot dy = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$
Midpoint	$y_{n+1} = y_n + h \cdot f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf(t_n, y_n)\right)$

Übung

Wir testen die drei Entwicklungsordnungen.

$$dy = k \qquad dy = k \cdot y \qquad dy = -k \cdot y^2$$

mit der Methode von Euler

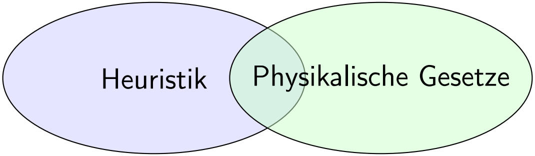
$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$$

in `python`

Entwicklungsordnungen in Kaninchen – python Code

```
import matplotlib.pyplot as plt

bunnies = 30

x = []
y = []

k = 1
h = 0.1

for i in range(10):
    x.append(i)
    y.append(bunnies)

    bunnies = bunnies + h * k * bunnies

plt.plot(x, y)
#plt.savefig('plot.png', dpi= 400)
plt.show()
```

Wie entsteht eine Differentialgleichung?



Das logistische Modell

Heuristik

- Zunahme proportional zur anfänglichen Menge
- aber nähert sich zu Null, wenn man sich einer bestimmten Grenzschwelle L nähert.

$$dy = k \cdot y \cdot (L - y)$$

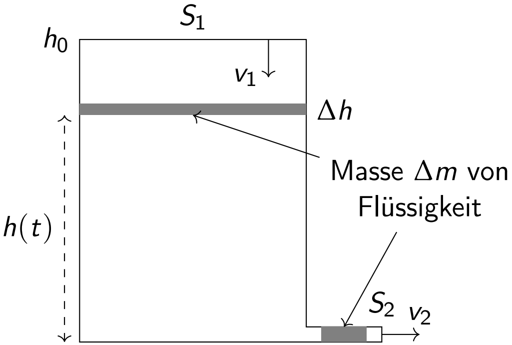
Räuber und Beute (Lotka-Volterra)

Heuristik

x Beute, y Räuber.

- Reproduktionsrate der Beute proportional zur Menge
- Sterberate der Räuber proportional zu ihrer Menge.
- Abnahme/Zunahme jeweils von Beute/Räubern proportional zur Anzahl der Begegnungen

$$\begin{cases} dx = \quad Ax - Byx \\ dy = -Dy + Cxy \end{cases}$$



- Energieerhaltung
- Kontinuitätsprinzip

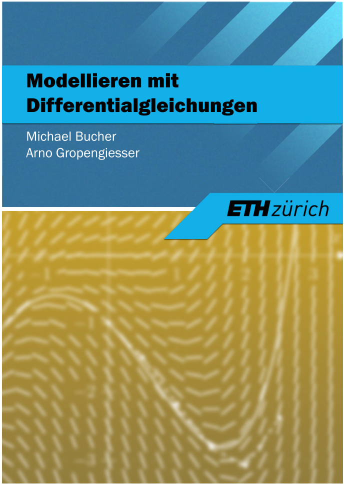
$$dh = -\frac{S_2}{S_1} \cdot \sqrt{2gh}$$

Übung

Wählen Sie eine der beschriebenen Entwicklungen aus und implementieren Sie sie in `python`

Logistisches Modell	$dy = k \cdot y \cdot (L - y)$
Beute-Räuber-Modell	$\begin{cases} dx = (A - By)x, \\ dy = (Cx - D)y \end{cases}$
Tankentleerung	$dh = -\frac{S_2}{S_1} \cdot \sqrt{2gh}$

Neugierig? [BG]



Rück- und Ausblick

Macht es Sinn auf Kantonsschule-Niveau davon zu sprechen?

- Förderung mathematischer und informatischer Aspekte
- Vielfältig und machbar
- Umsetung in `python` macht spass

und wenn die Zeit noch reicht...

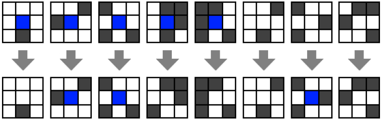
Besten Dank für eure Aufmerksamkeit!

www.vsmp.ch/cmsi

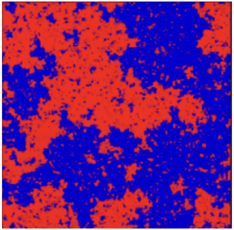
Addendum: Weitere Modelle

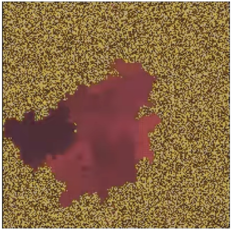
Zelluläre Automaten (Conway)

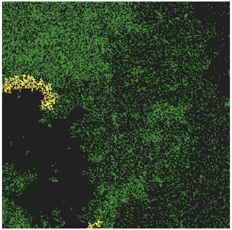
- Gitter aus Zellen mit Regeln für Überleben und Fortpflanzung



- Sehr einfaches Modell mit vielen Anwendungen [Der]







- Algorithmische Herausforderung: Verwaltung der Datenstruktur.

Tankentleerung (Mathematische Herleitung)

Nach dem Energieerhaltungssatz gilt:

$$\frac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \Delta m g h = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2.$$

Nach dem Kontinuitätsprinzip muss das austretende Volumen dem abfallenden Volumen entsprechen, also:

$$V_1 = V_2 \iff S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 \implies v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2.$$

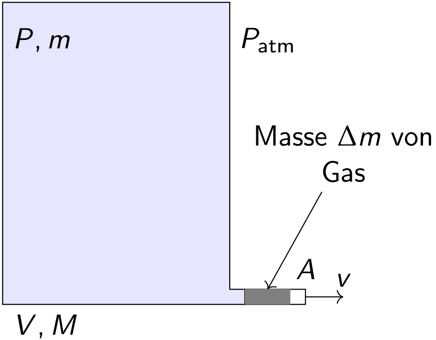
Durch Kombination der Gleichungen erhält man da Torricelli-Gesetz:

$$v_2 = \sqrt{2gh \cdot \frac{S_1^2}{S_1^2 - S_2^2}} \approx \sqrt{2gh}. \qquad (S_1 \gg S_2).$$

Letzlich folgt

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{S_2}{S_1} \cdot \sqrt{2gh}.$$

Entleerung Gasflasche [hS]



- Massenerhaltung
- Gesetz idealer Gase
- Bernoulli-Gesetz

$$\frac{dP}{dt} = -\gamma P \sqrt{\alpha - \beta \frac{1}{P}}$$

Entleerung Gasflasche (Mathematische Herleitung)

Aus der Massenerhaltung folgt

$$\frac{dm}{dt} = -\rho \cdot A \cdot v$$

wobei m die Masse, ρ die Dichte, A die Fläche der Auslassöffnung und v die Geschwindigkeit ist.

Mit dem Gesetz der idealen Gase $PV = nRT$, der Relation $m = n \cdot M$ (wobei n die Stoffmenge und M die molare Masse) und der Dichtefomel erhalten wir

$$m = n \cdot M = \frac{MPV}{RT} \qquad \rho = \frac{m}{V} = \frac{MP}{RT}$$

Durch Einsetzen dieser Identitäten in die vorherige Formel erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{MPV}{RT}\right) = -\frac{MP}{RT} \cdot A \cdot v$$

Da das Volumen konstant bleibt und wir auch annehmen, dass die Temperatur konstant ist, können wir die konstanten Terme herausziehen und erhalten

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{P}{V} \cdot A \cdot v.$$

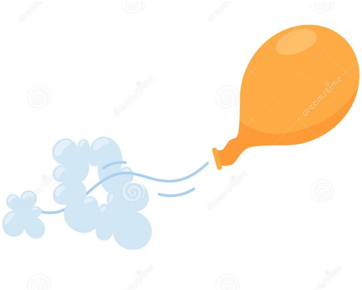
Das Bernoulli-Gesetz besagt andererseits:

$$v^2 = \frac{2(P - P_{atm})}{\rho} = \frac{2(P - P_{atm})RT}{MP} = \frac{2RT}{M} - \frac{2RTP_{atm}}{M}\frac{1}{P} =: \alpha - \beta\frac{1}{P},$$

wobei wir wieder die Dichtefomel eingesetzt haben. Durch Einsetzen dieser Identität in die vorherige Gleichung erhalten wir

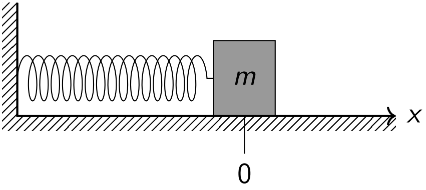
$$\frac{dP}{dt} = -\gamma P\sqrt{\alpha - \beta\frac{1}{P}}$$

Luftballon Entfüllung



$$\frac{dV}{dt} = 4\left(\frac{1}{V^{2/3}} - \frac{1}{V}\right)$$

Feder



Nach dem Hookeschen Gesetz ist die Kraft proportional zur Auslenkung

$$F = -k \cdot x.$$

Nach Newton gilt aber auch

$$F = ma$$

Und da die Beschleunigung die zweite Ableitung der Verschiebung ist

$$m \cdot d^2x = -k \cdot x \iff d^2x = \frac{-k}{m} \cdot x$$

Ein numerisches Verfahren zweiter Ordnung

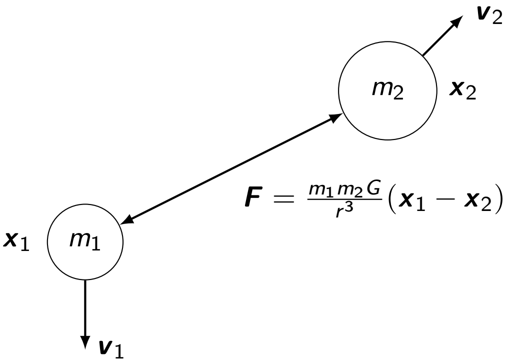
Da die Differenzialgleichung zweiter Ordnung ist (d^2x) , muss ein geeignetes Verfahren verwendet werden. Zu den einfachsten gehört das **Euler-Cromer-Verfahren**:

$$\begin{cases} dx = f(t, v) \\ dv = g(t, x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \cdot f(t_n, v_n) \\ v_{n+1} = v_n + h \cdot g(t_n, x_{n+1}) \end{cases}$$

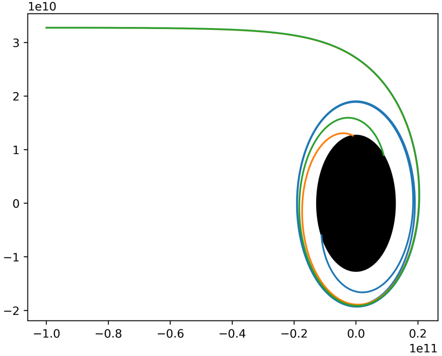
was im Fall der Feder zu folgender iterationsschritt führt

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \cdot v_n \\ v_{n+1} = v_n + h \cdot \frac{-k}{m} \cdot x_{n+1} \end{cases}$$

Gravitazionsgesetz



Lichtbeugung und Geodäten



Literaturverzeichnis

Michael Bucher and Arno Gropengiesser.
Modellieren mit differentialgleichungen.
https://www.math.ch/mathematics-at-school/service/unterrichtsmaterialien/.

Derek 'Veritasium' Muller.
You've (likely) been playing the game of life wrong (video).
https://www.youtube.com/watch?v=HBluLfX2F_k.

User (https://physics.stackexchange.com/users/41050/) SE.
Pressurized tank emptying over time through a given area.
https://physics.stackexchange.com/q/408932.

A.C. Neve.
Studio dello svuotamento di un serbatoio.
https://www.scribd.com/document/486393508/.